

DOI 10.33111/vz_kneu.43.26.02.12.082.088
ISSN printed: 2415-850X; online: 2415-8518
УДК 330.46 + 519.86
JEL Codes: C22, C3,
C6, C61, C62, C65, C69, O33, G32

Коляда Юрій Васильович

доктор економічних наук, професор,
професор кафедри штучного інтелекту, моделювання та статистики,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана,
03057, проспект Берестейський, 54/1, Київ, Україна
e-mail: koliada_yuri@kneu.edu.ua
ORCID ID: 0000-0003-3474-8706
Scopus ID: 7004082737

Шатарська Інна Федорівна

старший викладач кафедри штучного інтелекту, моделювання та статистики,
Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана,
03057, проспект Берестейський, 54/1, Київ, Україна
e-mail: shatarska_inna@kneu.edu.ua
ORCID ID: 0000-0001-7070-9718

**МАТРИЧНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ДИСКРЕТНОЇ МОДЕЛІ
НЕЛІНІЙНОЇ ЕКОНОМІКИ**

Koliada Yuri

Doctor of Economics, Associate Professor, Professor of the Department of Mathematical
Modeling and Statistics,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman,
03057, Ukraine, Kyiv, Beresteysky Avenue 54/1
e-mail: koliada_yuri@kneu.edu.ua
Scopus ID: 7004082737
ORCID ID: 0000-0003-3474-8706

Shatarska Inna

senior lecturer of the Department of of Artificial Intelligence, Modeling and Statistics,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman,
03057, Ukraine, Kyiv Beresteysky Avenue 54/1
e-mail: shatarska_inna@kneu.edu.ua
ORCID ID: 0000-0001-7070-9718

**MATRIX GENERALIZATION OF THE DISCRETE MODEL
OF NONLINEAR ECONOMY**

Анотація. Сучасна економіка є відкритою нелінійною системою необоротної дії, якій притаманні не тільки наявність, а й складне сплетіння численних прямих і зворотних зв'язків протилежних знаків, на розвиток якої має суттєвий вплив зовнішніх

факторів, ентропії, внаслідок чого можуть змінюватися цілі її функціонування. Її притаманна наявність складових економічного процесу, які змінюються з різними швидкостями та прискореннями, « дрейфують » із плином часу. Завдяки цьому математичні моделі (ММ) економіки належать до класу некоректних задач (мають місце так звані жорсткі рівняння динаміки), що викликає значні труднощі в дослідженні рушійних сил нелінійної економіки, вивченні спрямованості рухів економічної еволюції. Як нагальна потреба реальної економіки постає проблема раціонального прогнозування їхньої поведінки, передбачати настання механізмів, подій чи явищ їхнього розвитку. Саме надзвичайна складність еволюції економіки та її прикметні риси сприяли розвитку комп'ютерного моделювання існуючих проблем, яке дозволяє з'ясувати причинно-наслідкові зв'язки досліджуваного об'єкта господарювання, передбачити його можливе функціонування — віртуальні сценарії еволюції для тих чи інших стартових умов — від простих до циклічних, різних періодів, та хаотичної поведінки дивного атрактора. Повне й глибоке, всебічне вивчення поведінки економічної системи досягається відмовою від жорстких конфігурацій моделювання та переходом до адаптивного застосування не лише альтернативної множини динамічних моделей нелінійної економіки, але гнучкого використання наявного інструментарію їхнього вивчення. Отримання віртуальних сценаріїв їхнього успішного функціонування, проводиться на підставі системного чину адаптивної процедури доцільного комп'ютерного моделювання — використання матричної модифікації дискретної моделі, на противагу загальному прийнятому способу здійснення обчислювального експерименту (ОЕ) з використанням одного числового алгоритму. Ця альтернативна множина ітеративних відображень сприяє оптимізації процесу обчислень, завдяки чому зменшується фатальний вплив неповноти статистичної інформації, ступінь невизначеності та, відповідно, економічного ризику, підвищується точність результату й швидкість моделювання віртуальних сценаріїв поведінки об'єктів господарювання. Стьйкість динамічної дискретної нелінійної моделі — досягнення результатів цифрового моделювання досліджується із використанням показника Херста для часових рядів її факторів, для якого вказано наближені формули розрахунку.

Ключові слова: дискретна модель числового аналізу нелінійної економіки, цифрове моделювання, системна модифікація, віртуальні сценарії економічної еволюції, жорстка конфігурація ОЕ в економіці, системний чин, матрична модифікація дискретної моделі, логістичне відображення, гнучкий алгоритм комп'ютерного моделювання, персистентність часового ряду, показник Херста, ризикостійкість.

Abstract. The modern economy is an open nonlinear system of irreversible action, which is characterized not only by the presence, but also by a complex interweaving of numerous direct and feedback connections of opposite signs, the development of which is significantly influenced by external factors, entropy, as a result of which the goals of its functioning may change. It is characterized by the presence of components of the economic process that change with different speeds and accelerations, "drifting" over time. Due to this, mathematical models (MM) of the economy belong to the class of ill-posed problems (the so-called rigid equations of dynamics occur), which causes significant difficulties in the study of the driving forces of the nonlinear economy, the study of the direction of movements of economic evolution. As an urgent need of the real economy, the problem of rational forecasting of their behavior arises, to predict the occurrence of mechanisms, events or phenomena of their development. It is the extraordinary complexity of the evolution of the economy and its characteristic features that contributed to the development of computer modeling of existing problems, which allows to clarify the cause-and-effect relationships of the studied economic object, to predict its possible functioning — virtual scenarios of evolution for certain starting conditions — from simple to cyclical, different periods, and chaotic behavior of a strange attractor. A complete and deep, comprehensive study of the behavior of the economic system is achieved by abandoning rigid modeling configurations and moving to the adaptive application of not only an alternative set of dynamic models of nonlinear economics, but also the flexible use of the existing tools for their study. Obtaining virtual

scenarios of their successful functioning is carried out on the basis of a systematic order of the adaptive procedure of expedient computer modeling — the use of matrix modification of a discrete model, as opposed to the generally accepted method of carrying out a computational experiment (CE) using a single numerical algorithm. This alternative set of iterative mappings contributes to the optimization of the calculation process, thereby reducing the fatal impact of incomplete statistical information, the degree of uncertainty and, accordingly, economic risk, increasing the accuracy of the result and the speed of modeling virtual scenarios of the behavior of business entities. The stability of a dynamic discrete nonlinear model — the achievement of digital modeling results is investigated using the Hurst index for the time series of its factors, for which approximate calculation formulas are given.

Keywords: discrete model of numerical analysis of nonlinear economy, digital modeling, system modification, virtual scenarios of economic evolution, rigid configuration of CE in the economy, system rank, matrix modification of discrete model, logistic mapping, flexible algorithm of computer modeling, time series persistence, Hurst exponent, risk tolerance.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями. У сукупності зазначене вище викликає значні труднощі дослідження рушійних сил нелінійної економіки, вивчення напрямів руху її еволюції. Як нагальна потреба реальної економіки постає раціональне прогнозування поведінки, передбачення механізмів настання подій чи явищ їхнього розвитку.

Саме надзвичайна складність еволюції економіки та її прикметні риси сприяли появі словосполучення «обчислювальний експеримент в економіці» або «експериментальна економіка», що за своїм змістом відповідає комп'ютерному моделюванню існуючих проблем. Воно дозволяє з'ясувати причинно-наслідкові зв'язки досліджуваного об'єкта господарювання, також передбачити його можливе функціонування — віртуальні сценарії еволюції для тих чи інших стартових умов. У такий спосіб може усуватися, певним чином, неповнота економічної інформації, зменшуватися ступінь невизначеності та економічного ризику, підвищуватися точність і швидкість моделювання економічних систем.

Розгорнутий аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасна економіка, будучи нелінійною за своєю природою, детермінується [1, 2] як відкрита, нерівноважна та необоротної дії система, якій притаманні хитросплетіння численних прямих і зворотних зв'язків полярних знаків. Економічна система також кваліфікується як така, що перманентно розвивається, оскільки має місце дрейф її складових із плином часу. Вона піддається впливам ззовні, також можуть змінюватись як цілі її функціонування, так і мета існування.

Онтологічно економіці властива наявність швидких та повільних змінних — складових процесу економічної еволюції. Саме завдяки цьому математичні моделі (ММ) належать до класу некоректних задач — мають місце жорсткі рівняння економічної динаміки або погано обумовлені матриці у випадку рівноважної економіки.

Праця [3] стосується дослідження стійкості розв'язків нелінійних динамічних моделей макроекономіки — віртуальних сценаріїв їхньої економічної еволюції.

Деталізована методика дослідження. Повне й глибоке, всебічне вивчення поведінки економічної системи досягається відмовою від жорстких конфігурацій моделювання та переходом до адаптивного [2] застосування не лише альтер-

рнативної множини динамічних моделей нелінійної економіки, а й гнучкого використання наявного інструментарію їхнього вивчення.

Спочатку, має бути математично проведений якісний аналіз — з'ясування шляхів можливого економічного розвитку на підставі ММ; після цього етапу — кількісне дослідження траєкторій еволюції з плином часу та побудова фазових портретів — взаємозалежностей між змінними ММ; завершальний етап — апостеріорне оцінювання динаміки економічного ризику).

Комп'ютерне моделювання динаміки нелінійної економіки пропонується здійснювати на підставі використання певного алгоритму з апроксимацією матричної експоненти e^{A_n} скінченним матричним рядом Тейлора $\sum_{i=0}^k \frac{A_n^i}{i!}$ — можна розрахувати результат, який буде верхньою границею дискретної моделі.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. На нашу думку, реалізація викладеного вище у вигляді пакету прикладних програм (ППП) цілком відповідає сутності терміну «цифрова економіка» — неологізму сучасного економічного аналізу.

Як потенційні успіхи, так можливі невдачі комп'ютерного моделювання зумовлюються існуванням належної (перш за все адекватної) динамічної моделі досліджуваного економічного об'єкта.

При цьому потрібно звернути увагу на дослідження стійкості процесу моделювання (часових рядів факторів (змінних) дискретної динамічної моделі) із використанням показника Херста.

Формулювання цілей статті — отримання віртуальних сценаріїв альтернативних шляхів економічної еволюції на підставі системного чину адаптивної процедури доцільного комп'ютерного моделювання — використання матричної модифікації дискретної моделі — різноманітні ітеративні відображення на протигагу загально прийнятому способу здійснення обчислювального експерименту (ОЕ) з використанням одного числового алгоритму:

- ✓ їхня сукупність є однорідною за способом свого отримування, що сприяє розбудові адаптивної процедури моделювання;
- ✓ алгоритми зазначеної сукупності мають високу швидкість збіжності обчислень;
- ✓ рекурентність дискретних моделей сприяє розрахунку оцінки числової міри економічного ризику, що дозволяє оптимізувати процес моделювання.

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Цифрове або числове моделювання динамічної поведінки макроекономічної системи здійснюється із використанням покоординатного відображення — дискретну модель:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \cdot \exp(\alpha \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)), \\ y_{n+1} = y_n \cdot \exp(\beta \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)), \\ z_{n+1} = z_n \cdot \exp(\gamma \cdot (y_n - z_n)). \end{cases} \quad (1)$$

змінні якої відповідають нормованим значенням:

$x_n = \frac{P_n}{P_e}$ — рівня цін;

$y_n = (\frac{r_e}{r_n})^s$ — ставки процента;

$z_n = \frac{y_n}{y_e}$ — національного доходу, де індекси визначають n — поточний момент;

e — стаціонарний базовий стан.

$\alpha, \beta, \gamma, m, s$ — це скалярні величини, що характеризують поведінку певної макроекономічної системи.

Економічний стан описується трьома агрегованими фазовими змінними:

Y — національний дохід (рівень товарів і послуг, кінцевий продукт), причому Y^d є сукупним попитом, а p є рівнем цін на товари та послуги.

Отже, ключовими факторами економічної еволюції на підставі дискретної динамічної моделі (1) є надмірний попит та зайва (надлишкова) грошова маса.

Як завжди, ітеративний процес (1) повинен мати початкові наближення Y_0, Y_0^d, p_0 — стартові умови економічної еволюції. Для організації процедури моделювання припускають також наступне: для першої ітерації маємо

$$Y_1 = Y_0 \cdot \exp(a \cdot \frac{Y_0^d - Y_0}{Y_0^d + Y_0}),$$

а наступні наближення здійснюються таким чином

$$Y_{n+1} = Y_n \cdot \exp(a \cdot \frac{Y_n^d - Y_n}{Y_n^d + Y_n}) \cdot (\frac{P_n}{P_{n-1}})^\alpha,$$

де число a характеризує ступінь реакції економіки на дисбаланс попиту та пропозиції, число α є коефіцієнтом еластичності темпу зростання ціни $\frac{P_n}{P_{n-1}}$, відображаючи взаємозв'язок динаміки цін та обсягів виробництва.

Попит на споживчі товари описується рівнянням

$$Y_{n+1}^d = Y_n^d \cdot \exp(b \cdot \frac{M_s - M_n^d}{M_s + M_n^d}),$$

де числовий параметр $b > 0$ відображає реакцію споживачів на дисбаланс між кількістю M_s грошової маси та попитом на гроші M_n^d .

Рівень варіативності товарів і послуг із плином часу детермінується рівнянням

$$P_{n+1} = P_n \cdot \exp(c \cdot \frac{Y_{n+1}^d - Y_n}{Y_{n+1}^d + Y_n}),$$

де коефіцієнт $c > 0$ описує реакцію на дисбаланс попиту на товар та його пропозицію.

Зазначені вище залежності структурно нагадують одновимірне відображення (функцію або рівняння) Ріккера

$$x_{n+1} = x_n \exp(-k x_n), k > 0,$$

яке вперше було отримане в іхтіології, але згодом воно знайшло своє значне застосування в моделюванні макроекономічної динаміки еволюції та поведінки господарських об'єктів [1, 2]. (Принагідно зазначити, що знаменита в макроекономічному аналізі неперервна модель Харрода-Домара (XX ст.) із математич-

ної точки зору тотожна рівнянню Мальтуса в демографії (XVIII ст.). Уся справа — в предметному тлумаченні змінних динамічної лінійної одно вимірної моделі.)

Зі свого боку зауважимо, що згадуване тут можна розглядати як експоненційну модифікацію класичного логістичного відображення, пам'ятаючи про апроксимацію $\exp\{z\} \approx 1 - z$.

Запис дискретної моделі економічної динаміки у вигляді (1) відповідає так званому покоординатному підходу вивчення еволюції економічного стану для тривимірного простору подій. Саме такий підхід притаманний традиційному способу числової реалізації комп'ютерного моделювання поведінки досліджуваного об'єкта.

2. Перепишемо дискретну модель (1) у вигляді добутку діагональної матриці A_I на вектор-стовпець $W_n = [x_n \ y_n \ z_n]$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma \cdot (y_n - z_n)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

що є тотожним запису ітеративного відображення

$$W_{n+1} = A_I \cdot W_n, \quad (2a)$$

яке еквівалентне початковій динамічній моделі (1).

У такий спосіб отримується підґрунтя для підсилення результату (2), яке полягає в тому, що замість нульових елементів матриці A_I мають бути значущі вирази на кшталт дисперсійно-коваріаційної матриці в економетричному моделюванні. З огляду на хитросплетіння взаємозв'язків між елементами економічної системи діяти так доцільно та раціонально. Саме в такому разі матимемо системні, сенсі [4], процедури комп'ютерного моделювання, які вперше були запропоновані для випадку неперервних динамічних моделей електроніки — жорстких звичайних диференціальних рівнянь. Обчислювальна ефективність системних алгоритмів відмічалася в літературі неодноразово.

Для організації (створення) системної, в розумінні [2, 4], процедури комп'ютерного моделювання будемо розглядати матрицю $A = A_I + A_2$, де перший її доданок є діагональною матрицею A_I

$$A_I = \begin{bmatrix} e^{\alpha \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\beta \cdot (1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma \cdot (y_n - z_n)} \end{bmatrix},$$

а другий доданок, певною мірою, покликаний відтворювати хитросплетіння взаємозв'язків і взаємовпливів складових економічної системи (об'єкта моделювання), він має таку структуру:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ця матриця є симетричною, її елементи a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, i \neq j$) мають числові значення щоб відображати ступінь взаємозв'язків між змінними x, y, z , а саме:

- елемент a_{12} — ціни зі ставкою відсотка;
- елемент a_{13} — ціни з національним доходом;
- елемент a_{23} — відсоткової ставки з доходом суспільства.

Слід зазначити, що їхній вдалий вибір сприяє валідації математичної моделі (2), визначаючи ефективність і точність результатів цифрового моделювання.

З огляду на елементи діагональної матриці A_1 дискретну модель (2а) можна переписати у вигляді:

$$W_{n+1} = e^{\overline{A_1}} \cdot W_n, \quad (2b)$$

де діагональними елементами нової матриці $\overline{A_1}$ будуть показники степенів відповідних елементів матриці A_1 :

$$\overline{a_{11}} = \alpha \cdot \left(1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n\right); \overline{a_{22}} = \beta \cdot \left(1 - x_n \cdot y_n^{\frac{m}{s}} \cdot z_n\right); \overline{a_{33}} = \gamma \cdot (y_n - z_n).$$

На підставі ітеративного відображення (2b) пропонується надалі розглядати його узагальнення:

$$W_{n+1} = e^{\overline{A_1}} \cdot e^{A_2} \cdot W_n, \quad (3)$$

яке слід вважати системним за побудовою та узагальнюючим щодо дискретної моделі (2), адже для випадку $a_{ij} = 0$ елементів матриці A_2 отримуємо вихідну початкову модель. Враховуючи властивість показникової функції, системне ітеративне відображення (3) остаточно набуває виду:

$$W_{n+1} = e^{\overline{A_1} + A_2} \cdot W_n = e^{A_n} \cdot W_n, \quad (4)$$

де матриця $A_n = \overline{A_1} + A_2$ розраховується на кожному ітераційному циклі.

Отже, комп'ютерне моделювання динаміки нелінійної економіки пропонується здійснювати на підставі використання) алгоритму (4), але для цього потрібно матричну експоненту апроксимувати скінченним матричним рядом:

$$e^{A_n} = \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} = E + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (*)$$

У випадку $i = 0$ маємо одиничну матрицю E — перший доданок виразу (*) і отримуємо ітеративне відображення (1). Для всіх інших доданків ($i = 1, 2, \dots$) цього виразу матимемо однорідну вибірккову множину узагальнених (в сенсі системного підходу) ітеративних процесів, які мають значно більшу швидкість збіжності обчислень.

Зважаючи на властивість неперервного зростання експонентної функції, можна стверджувати, що для кожного поточного номеру i алгоритм цифрового моделювання буде мажорантним щодо попередніх значень.

У сенсі адаптивного комп'ютерного дослідження нелінійної економічної динаміки — відмови від жорсткої структури моделювання — альтернативна множина ітеративних відображень сприяє оптимізації процесу обчислень. Також у такий спосіб дещо зменшується фатальний вплив неповноти статистичної економічної інформації, ступінь невизначеності та, відповідно, економічного ризи-

ку, підвищується точність результату й швидкість моделювання віртуальних сценаріїв поведінки об'єктів господарювання.

Зауваження 1. На прикладі одновимірного експоненційного ітеративного відображення $y_{n+1} = \lambda \cdot (\exp(y_n \cdot (1 - y_n)) - 1)$ про різноманітні динамічні траєкторії поведінки віртуальних сценаріїв еволюції повідомлялося в праці [5]: від простих до циклічних, із різними періодами, та хаотичної поведінки дивного атрактора. Причому схильність до хаосу для модифікованого логістичного відображення досягається для значень $\lambda \in [3, \text{с. 23}; 3, \text{с. 569}]$ і початкових умов $y_0 = 0,8$ (рис. 1).

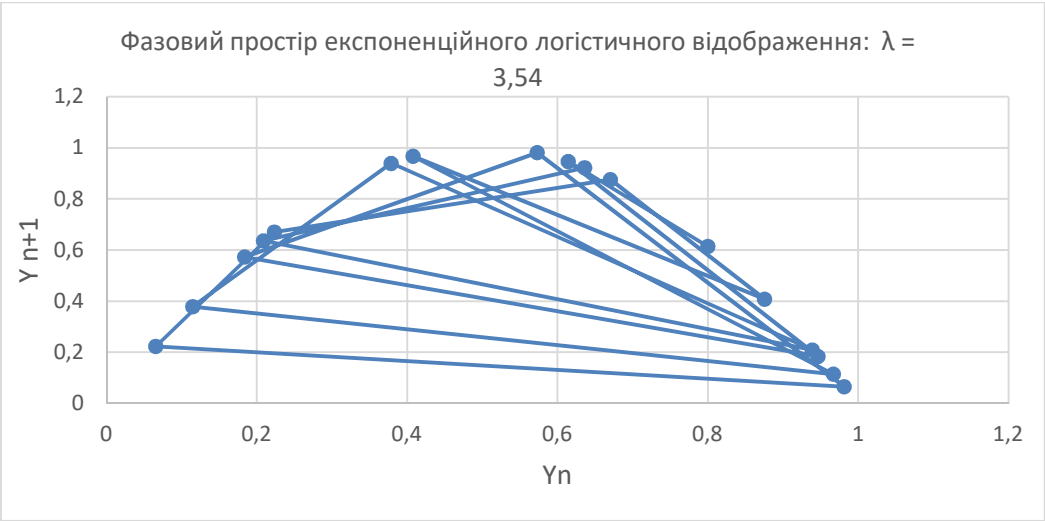


Рисунок 1 — Фазовий простір експоненційного логістичного відображення

А для ортодоксального логістичного відображення $x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$ для тих же початкових умов це відбувається для $\lambda \in [3, \text{с. 569}; 4]$ (рис. 2).

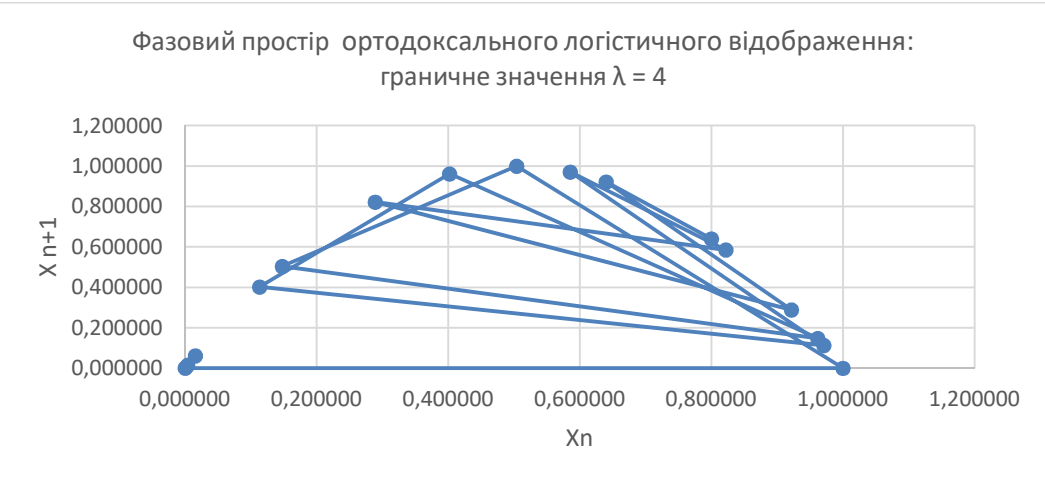


Рисунок 1 — Фазовий простір ортодоксального логістичного відображення

Зауваження 2. Сутність системного підходу до прикладного числового аналізу нелінійних об'єктів, що описуються сукупністю алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$f(X) = 0, \quad (**)$$

де вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і вектор-функція $f(X) = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, наочно демонструється на прикладі співставлення класичних методів пошуку розв'язків моделі (**) — послідовних наближень та Ньютона. Перший з них, алгоритм простої ітерації,

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - f(x^{(m)})$$

характеризується лінійною збіжністю до коренів рівнянь (**).

Ітеративний процес Ньютона

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - [f'(x^{(m)})]^{-1} \cdot f(x^{(m)})$$

містить компоненту $[f'(x^{(m)})]^{-1}$ — обернену матрицю Якобі (частинних похідних $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$) системи рівнянь (**)) і має, загалом, квадратичну швидкість процесу обчислень, бо приймаються до відома (не ігноруються!) часткові швидкості складових об'єктів моделювання. Саме так відбувається урахуванням системних властивостей математичної моделі (**).

Зауваження 3. Один з можливих способів розрахунку значень елементів матриці A_2 полягає в наступному:

- наприклад, перші 12 ітерацій відображення (1) надають так звану статистичну або експериментальну інформацію щодо змінних дискретної динамічної моделі;
- далі застосовується алгоритм Фаррара-Глобера дослідження тісноти лінійного зв'язку ($a_{12} = \text{cov}(x, y)$, $a_{13} = \text{cov}(x, z)$, $a_{12} = \text{cov}(y, z)$) між змінними математичної моделі.

Встановлення факту мультиколінеарності між змінними дискретної динамічної моделі (1) опосередковано свідчить, що вона є нестійкою, суттєво некоректною, а об'єкт господарювання — глибоко нелінійний.

Тому оцінювання стійкості динамічної моделі (4) здійснимо, використовуючи результати вивчення ризикостійкості економічного показника [6].

Кількісні значення кожної змінної динамічної моделі (4) утворюють часові ряди (ЧР) відповідного макроекономічного фактору зростання нелінійного об'єкту господарювання, причому нестійкість хоча б одного з ЧР провокує хаос в отримуванні результатів моделювання, а стійкість сприяє успіху.

Стійкість траєкторії еволюції чинника оцінюється, використовуючи показник Херста H , величина якого й характеризує наявність або відсутність персистентності — стійкості значень часового ряду:

$$\frac{R}{S} = \left(\frac{\tau}{2}\right)^H, \quad (5)$$

де $R(\tau) = \Phi_{max}^{(k)} - \Phi_{min}^{(k)}$ — розмах часового ряду за період часу τ , а S — його стандартне відхилення.

Звідки $H = \frac{\ln(\frac{R}{S})}{\ln(\tau/2)}$, для $0,5 \leq H \leq 1$ — є наявна персистентність; для $0 \leq H < 0,5$ — немає стійкості значень часового ряду.

На підставі оцінки числової міри ризикованості стратегії s_k у вигляді:

$$Risk(s_k) = \frac{\Phi_{max}^{(k)} - \Phi_{min}^{(k)}}{(\Phi_{max}^{(k)} + \Phi_{min}^{(k)})/2}$$

та використовуючи нерівність $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ (співвідношення між середнім арифметичним і середнім геометричним), отримується вираз наближеного оцінювання «згори» економічного ризику стратегії, сценарію s_k :

$$Risk(s_k) \leq \sqrt{\frac{\Phi_{max}^{(k)}}{\Phi_{min}^{(k)}}}.$$

Із врахуванням рівності (5) маємо таку наближену оцінку міру ризику:

$$Risk(s_k) \leq \frac{(\frac{\tau}{2})^H \cdot S}{\Phi_{max}^{(k)}},$$

Елементарні перетворення цієї нерівності надають наближену оцінку «знизу» показника Херста: $H \geq \frac{\ln(Risk(s_k) \cdot \frac{\Phi_{max}^{(k)}}{S})}{\ln(\tau/2)}$.

Висновки й перспективи подальших наукових досліджень. У статті запропоновано підхід щодо отримання множини швидкозбіжних ітеративних відображень — рекурентних дискретних моделей нелінійної макроекономічної динаміки. За побудовою кожен алгоритм більшої швидкості збіжності охоплює всі попередні ітеративні процедури відображення. Зазначена сукупність, система динамічних моделей (4), дозволяє:

- більш повно відображати наявну інформацію щодо можливих шляхів розвитку нелінійних економічних систем (об'єктів господарювання);
- оперативно надавати отримані результати в наочній формі;
- сформулювати рекомендації щодо прийняття доцільних управлінських рішень внаслідок критичного аналізу віртуальних сценаріїв еволюції системи.

Якщо початкову модель (1) макроекономічної динаміки використовувати в якості оцінки знизу, вважаючи її песимістичним сценарієм розвитку, то серед множини ітеративних відображень (4) — оцінок згори — можна визначити оптимістичний сценарій економічної еволюції, тобто отримувати можливість оцінювання числової міри ризику, ризикостійкості.

Стійкість процесу моделювання (часових рядів факторів (змінних) дискретної динамічної моделі) досліджується із використанням показника Херста, для якого

вказано наближені формули розрахунку, що сприяє оптимізації процесу моделювання, бо попередні обчислення органічно долучаються до поточних.

Тобто явище рекурентності дискретних моделей сприяє апостеріорному оцінюванню не лише похибки обчислень, але й розрахунку оцінки числової міри економічного ризику, зростання якого є своєрідним сигналом щодо негараздів не тільки процесів комп'ютерного моделювання, а й можливих негативних процесів щодо еволюції об'єкта господарювання.

За нинішніх умов глобалізації, інтенсивної взаємодії різних складових економіки та потреби негайного реагування, в сенсі прийняття адекватних управлінських рішень, як ніколи раніше потребується використання нелінійного інструментарію моделювання.

Саме таким прикладом є запропонований у статті спосіб отримання рекурентного сімейства дискретних моделей макроекономічної динаміки.

Зазначений міждисциплінарний підхід є своєчасним, цілком слушним, конструктивним і надійним, в той же час — простим в організації комп'ютерного моделювання на шляху впровадження в життя цифрової економіки — глибокого та всебічного дослідження складних процесів, що відбуваються, як всередині, так і зовні, об'єктів господарювання.

Література

1. Scott E. Page (2019). The Model Thinker (What You Need to Know to Make Data Work for You) / Basic books — 528 p.
2. Коляда Ю.В. Адаптивна парадигма моделювання економічної динаміки: монографія / Ю.В. Коляда. — 2 вид. перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2019. — 367 с.
3. Про стійкість стаціонарних рішень нелінійних динамічних моделей макроекономіки / Н.В. Апатова, В.В. Лебедєв, К.В. Лебедєв, P.Steiner // VII Міжнародна школа-симпозіум «Аналіз, Моделювання, Управління, Розвиток економічних систем» (АМУР 2013): зб. наук. пр. 12-21 вересня 2013, м. Севастополь.
4. Демирчян К.С., Ракитський Ю.В. Нові числові методи інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь нелінійних електричних ланцюгів// Проблеми електроніки та обчислювальної техніки. — Київ: «Наукова думка». — 1976. — с. 143-152.
5. Коляда Ю.В. Експоненційна модифікація логістичного відображення / Ю.В. Коляда, І.Ф. Шатарська //I Міжнародна науково-практична інтернет-конференція RECENT TRENDS IN SCIENCE 5-6 травня 2022 року, м. Дніпро / Editorial board of International Electronic Scientific and Practical Journal «WayScience» (issn 2664-4819 (Online) — p. 117-121.
6. Коляда Ю.В., Шатарська І.Ф. «Кількісне оцінювання ризику для амплітуди динамічної траєкторії ризикостійкості маркетингової стратегії» / Зб. наук. пр. «Моделювання та інформаційні системи в економіці» № 92, — К.: КНЕУ, 2016 р., ст.149-158.

References

1. Scott E. Page (2019). The Model Thinker (What You Need to Know to Make Data Work for You) / Basic books — 528 p.
2. Kolyada Yu.V.(2019) Adaptive paradigm of modeling economic dynamics: monograph / Yu.V. Kolyada. — 2nd ed. revised and supplemented — K.: KNEU, 367 p.

3. On the stability of stationary solutions of nonlinear dynamic models of macroeconomics / N.V. Apatova, V.V. Lebedev, K.V. Lebedev, P.Steiner // VII International School-Symposium "Analysis, Modeling, Management, Development of Economic Systems" (AMUR 2013): collection of scientific proceedings, September 12-21, Sevastopol.

4. Demirchyan K.S., Rakitsky Yu.V. (1976) New numerical methods for integrating rigid systems of differential equations of nonlinear electric circuits// Problems of electronics and computing. — Kyiv: «Naukova Dumka».— pp. 143-152.

5. Kolyada Y.V. (2022) Exponential modification of logistic mapping / Y.V. Kolyada, I.F. Shatarska //I International Scientific and Practical Internet Conference RECENT TRENDS IN SCIENCE May 5-6, Dnipro / Editorial board of International Electronic Scientific and Practical Journal «WayScience» (issn 2664-4819 (Online) — p. 117-121.

6. Kolyada Yu.V., Shatarska I.F. (2016) «Quantitative risk assessment for the amplitude of the dynamic trajectory of risk tolerance of marketing strategy» / Collection of scientific works «Modeling and information systems in economics» No. 92. Kyiv: KNEU. P. 149-158.

Стаття надійшла 17.12.2025; прийнята до друку 18.03.2026.